

Encore plus de calcul

Le but de ces séances de calcul est de s'entraîner à calculer bien et efficacement. Et ce, bien sûr, sans calculatrice !

Du calcul avec de vrais réels

Exercice 1 — Exponentielle et logarithme

Simplifier les expressions suivantes.

1. $e^{\ln(3)-\ln(2)}$

2. $-e^{-\ln(\frac{1}{2})}$

3. $e^{-\ln(\ln(2))}$

4. $\ln\left(\frac{1}{e^{-\ln(e^2)}}\right)$

5. $\ln(\sqrt{e^4}) - \ln(\sqrt{e^2})$

6. $\ln(\sqrt{\exp(-\ln(e^2))})$

7. $\exp\left(-\frac{1}{2}\ln(e^{-3})\right)$

Exercice 2 — Fractions

1. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 0\}$. Simplifier $\frac{x - \frac{1}{x}}{\frac{1}{x} + 1}$.

2. Soit t un réel différent de -1 . Posons

$$a = \frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{(1+t)^2} \text{ et } b = (1+t^2)(1+t)^2.$$

Calculer le produit ab .

Exercice 3 — Puissances

Simplifier les expressions suivantes.

1. $\frac{10^5 \cdot 10^{-3}}{(10^{-5} \cdot 10^3)^{-3}}$

2. $\frac{(10^3)^{-5} \cdot 10^5}{10^3 \cdot 10^{-5}}$

Exercice 4 — Inégalités

Résoudre l'inéquation suivante, d'inconnue $x \in \mathbb{R} \setminus \{0; 2\}$:

$$\frac{1}{x-2} \leq \frac{1}{x}.$$

Du calcul avec de vraies fonctions

Exercice 5 — Évaluations

Considérons la fonction suivante, qui est définie et dérivable sur $] -1; +\infty[$:

$$\begin{aligned} f:] -1; +\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \ln(1+x). \end{aligned}$$

Calculer les expressions suivantes, pour tout réel x en lequel elles sont définies :

1. $f'(0)$;
2. $f(2e^x - 1)$;
3. $xf'(2x) - 1$;
4. $e^{x - \frac{1}{2}f(x)}$;
5. $\frac{1}{2}f(x^2 - 2x)$;
6. $e^{\frac{f(x)}{f'(x-1)}}$.

Exercice 6 — Études de fonctions

Pour chacune des fonctions suivantes :

- (a) donner son domaine de définition et son domaine de dérivabilité ;
- (b) calculer sa dérivée ;
- (c) dresser son tableau de variations.

$$1. t \mapsto \sqrt{1 - \frac{2}{t}}$$

$$2. x \mapsto \ln(\ln(x) + 1)$$

$$3. u \mapsto \frac{u}{\sqrt{9 - u^2}}$$

$$4. s \mapsto (s^2 - 2s - 11)e^{2s}$$

Exercice 7 — Avec des paramètres

Soient A, E, R, R_2, C, ω et φ des réels strictement positifs.

1. Trouver le maximum de la fonction dérivable suivante :

$$P: \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$R_1 \mapsto \frac{R_1 E^2}{(R_1 + R_2)^2}.$$

2. Calculer la dérivée de la fonction dérivable suivante :

$$u: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$t \mapsto E \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right).$$

3. Calculer la dérivée de la fonction dérivable suivante :

$$s: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$t \mapsto A \sin(t) \cos(2t) \sin(\omega t + \varphi).$$

Exercice 8 — Plus de logarithme

1. Déterminer l'ensemble $\mathcal{D}$ de définition de la fonction

$$\varphi: x \mapsto \ln(x^2 - 1).$$

2. Parmi les trois fonctions suivantes, lesquelles coïncident avec la fonction φ sur l'ensemble $\mathcal{D} \cap]1; +\infty[$?

$$(a) f: x \mapsto 2 \ln(x) - 1$$

$$(b) g: x \mapsto \ln(x - 1) + \ln(x + 1)$$

$$(c) h: x \mapsto \ln(x - 1) - \ln(x + 1)$$